

Лабораторная работа.
Магнитное поле Земли. Горизонтальная составляющая.
 Алексей Гуденко

*Определение горизонтальной составляющей
 индукции магнитного поля Земли
 методом крутильного маятника.*

Цель работы.

Определение величины магнитного момента магнитного шарика; проверка свойства аддитивности для магнитных моментов магнитных шариков; определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли с помощью крутильного маятника.

Оборудование.

Неодимовые магнитные шары диаметром $d_1 = 5$ мм (10 штук) и $d_2 = 6$ мм (10 штук), набор бумаги для заметок (толщина стопки ~ 30 мм), штатив с лапкой, тонкая нить, секундомер, деревянная линейка, миллиметровка

Доп. оборудование (по требованию, - достаточно трёх-четырёх на аудиторию): штангенциркуль, весы.

Необходимые сведения.

1. Точечный магнитный диполь.

Диполь (магнитный, электрический) называют точечным (или элементарным), если его размеры ℓ малы по сравнению расстояниями до диполя r .

Магнитное поле точечного диполя с магнитным моментом \mathbf{P}_m определяется по формуле, аналогичной формуле поля для точечного электрического диполя:

$$\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi) \{3(\mathbf{P}_m \mathbf{r})/r^5 - \mathbf{P}_m/r^3\}, \mu_0 - \text{магнитная постоянная, } \mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Вектор магнитного момента \mathbf{P}_m направлен от южного (S) к северному (N) полюсу.

2. Магнитный шар.

Магнитное поле однородно намагниченного шара совпадает с полем точечного диполя, расположенного в центре шара.

Магнитные шары в нашей работе изготовлены из магнитожёсткого материала (*неодима*).

Это означает, что под действием внешних магнитных полей намагниченность шара не изменяется, и он ведёт себя как *жесткий* диполь. Электрическим аналогом магнитного шара из магнитожёсткого материала является диэлектрический шар, изготовленный из *электрета* - материала с «замороженной» поляризацией. Шар, изготовленный из электрета, ведёт себя в электрическом поле точно также, как магнитный шар в магнитном поле. Это означает, что формулы, описывающие взаимодействие постоянных шарообразных магнитов между собой и с магнитным полем, полностью – с точностью до обозначений – идентичны формулам, описывающих поведение электрических диполей в электрическом поле.

3. Сила взаимодействия магнитных шаров.

Два однородно намагниченных шара с магнитными моментами \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 направленными вдоль соединяющей их прямой взаимодействуют как точечные диполи с силой:

$$F = P_m \partial V / \partial r = P_m \partial (2P_m / r^3) / \partial r = -(\mu_0/4\pi) 6P_m^2 / r^4, \text{ где } r - \text{расстояние между центрами шаров.}$$

(Эта формула аналогична формуле для силы взаимодействия электрических диполей $F = P \partial E / \partial r = P \partial (2P / r^3) / \partial r = -(1/4\pi\epsilon_0) 6P^2 / r^4$).

Магниты притягиваются, если их магнитные моменты сонаправлены $\mathbf{P}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{P}_2$ (а именно так выстраиваются магнитные моменты магнитов, когда их подносят друг к другу), и отталкиваются, если моменты направлены противоположно друг другу $\mathbf{P}_1 \uparrow \downarrow \mathbf{P}_2$.

Одинаковые шары с магнитными моментами $P_1 = P_2 = P_m$ притягиваются с силой:

$$F = P_m \partial E / \partial r = P_m \partial (2P_m / r^3) / \partial r = -(\mu_0 / 4\pi) 6P_m^2 / r^4.$$

(Если магнитные моменты расположены перпендикулярно соединяющей их прямой, то сила их взаимодействия (притяжения) в два раза меньше: $F = -(\mu_0 / 4\pi) 3P_m^2 / r^4$).

4. Определение величины магнитного момента.

Зная массу магнитных шариков m и определив максимальное расстояние, на котором шары ещё удерживают друг друга, можно рассчитать величину магнитного момента P_m каждого шарика (см рис.):

$$(\mu_0 / 4\pi) 6P_m^2 / r_{\max}^4 = mg \rightarrow P_m = (m g r_{\max}^4 / 6(\mu_0 / 4\pi))^{1/2}.$$

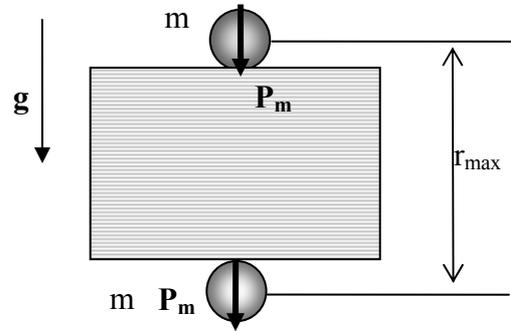
По величине магнитного момента P_m можно рассчитать величину индукции магнитного поля вблизи поверхности шара радиуса R .

Максимальные величины индукции наблюдаются на полюсах:

$$B_p = (\mu_0 / 4\pi) 2P_m / R^3$$

(на экваторе поле в два раза меньше).

Силовые линии «выходят» из северного и «входят» в южный полюс магнита.



5. Определение величины магнитного момента по силе сцепления магнитных шаров.

Величину магнитного момента шариков можно определить также по силе их сцепления. Она определяется как сила, необходимая для разрыва двух сцепившихся магнитных шаров. Эта сила максимальна, если шары соединяются своими полюсами.

Силу сцепления можно определить по весу «магнитной цепочки», которую способен удержать самый верхний магнитный шарик.

Если цепь состоит из одинаковых магнитных шаров (см. рис.), то при определённой длине часть её отрывается от верхнего шарика. При этом, учитывая, что сила притяжения убывает как $1/r^4$ (где r - расстояния между центрами шаров) $F \sim 1/r^4$, для расчёта прочности цепочки достаточно учитывать силу взаимодействия верхнего шара с двумя-тремя ближайшими соседями. Если сила сцепления двух одинаковых шаров диаметром d с магнитными моментами P_m равна ($r = d$):

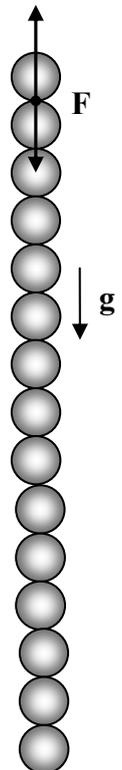
$$F_0 = (\mu_0 / 4\pi) 6P_m^2 / d^4,$$

то минимальный вес цепочки, при которой она оторвётся от верхнего шара:

$$F = \mu_0 / 4\pi 6P_m^2 / d^4 + \mu_0 / 4\pi 6P_m^2 / (2d)^4 + \dots = F_0(1 + 1/2^4 + 1/3^4 \dots) \approx F_0(1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4) \approx 1,08F_0 \rightarrow$$

Таким образом, силу сцепления двух шаров можно определить по формуле:

$$F_0 = F / 1,08.$$



6. Намагниченность. Остаточная магнитная индукция.

По величине магнитного момента P_m можно рассчитать **намагниченность** вещества магнита, которая определяется как магнитный момент единицы объёма:

$$r_m = P_m / V.$$

Эта важная характеристика магнитных материалов, определяющая, в частности, величину **остаточной магнитной индукции** $B_r = \mu_0 r_m$ (эта одна из величин, которая, как правило, указывается в справочниках по магнитным материалам).

Магнитное поле на полюсе шара связано с величиной намагниченности и остаточной магнитной индукции формулой:

$$B_p = 2/3 \mu_0 p_m = 2/3 B_r.$$

7. **Ориентирующее воздействие магнитного поля на магнитный момент (диполь).**

В магнитном поле на точечный магнитный диполь действует механический момент сил: $\mathbf{M} = [\mathbf{P}_m \mathbf{B}]$ (векторное произведение векторов \mathbf{P}_m и \mathbf{B} , величина механического момента $M = P_m B \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \mathbf{P}_m и \mathbf{B}).

Под действием вращающего момента \mathbf{M} свободный постоянный магнит (или виток с током) поворачивается так, что его магнитный момент выстраивается вдоль вектора индукции магнитного поля $\mathbf{P}_m \uparrow \uparrow \mathbf{B}$. Это – положение устойчивого равновесия: при отклонении от этого положения возникает момент внешних сил, возвращающий диполь к положению равновесия. В результате возникают колебания стрелки вблизи равновесного положения.

8. **Колебания магнитной стрелки в магнитном поле.**

Соберём «магнитную стрелку» из шариков, сцепив их друг с другом. Магнитные моменты шариков направлены в одну сторону вдоль оси «стрелки». Подвесим «стрелку» на тонкой нити в горизонтальном положении. Стрелка выстроится в направлении Юг → Север. При небольшом отклонении «стрелки» от равновесного положения в горизонтальной плоскости возникают крутильные колебания. Период колебаний такого крутильного маятника определяется возвращающим моментом сил, действующим на «стрелку» со стороны магнитного поля Земли (при этом мы пренебрегаем упругостью самой нити) и моментом инерции I_n «стрелки» относительно вертикальной оси вращения, проходящей через её середину.

Уравнение малых ($\sin \varphi \approx \varphi$) колебаний «стрелки» имеет вид:

$$I_n d^2 \varphi / dt^2 = -P_m B_h \varphi \rightarrow I_n \varphi'' + P_m B_h \varphi = 0 \rightarrow$$

период колебаний:

$$T = 2\pi (I_n / P_m B_h)^{1/2} = 2\pi (I_n / n P_m B_h)^{1/2},$$

здесь $P_n = n P_m$ – полный магнитный момент магнитной стрелки,

B_h – горизонтальная составляющая магнитного поля Земли, I_n – момент инерции «стрелки» относительно оси вращения.

При выводе этой формулы предполагалось, что магнитный момент – величина аддитивная: полный магнитный момент системы магнитов («стрелки») равен векторной сумме магнитных моментов шариков составляющих «стрелку».

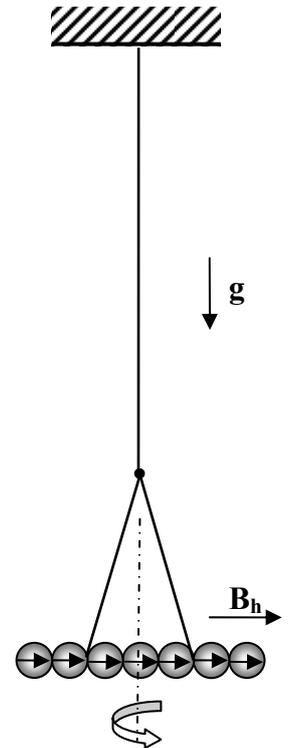
Момент инерции «стрелки», состоящей из n шариков, с хорошей точностью равен моменту инерции однородного тонкого стержня массой $M = nm$ и длиной $l = nd$:

$$I_n = 1/12 M l^2 = 1/12 n m (nd)^2 = 1/12 n^3 m d^2.$$

В результате, период колебаний оказывается пропорционален числу n шаров, составляющих «стрелку»:

$$T(n) = 2\pi (I_n / n P_m B_h)^{1/2} = 2\pi (n^3 m d^2 / 12 n P_m B_h)^{1/2} = 2\pi (m d^2 / 12 P_m B_h)^{1/2} n = kn,$$

где $k = 2\pi (m d^2 / 12 P_m B_h)^{1/2}$.



Задание

1. Определите магнитные моменты шариков по силе их притяжения через стопку бумаги (см. рис.):
 - а) Определите массу магнитного шарика.
 - б) Проложите между двумя одинаковыми магнитными шарами стопку бумаги.
 - в) Увеличивая или уменьшая толщину стопки, подберите максимальное расстояние r_{\max} , при котором магниты удерживают друг друга в поле тяжести Земли.

- d) Рассчитайте величину магнитного момента магнетика P_m , приравняв силу притяжения двух магнитных диполей $F = (\mu_0/4\pi) 6P_m^2/r_{\max}^4$ силе тяжести $F_T = mg$. (магнитные моменты шариков одинаковых диаметров считайте одинаковыми).
- e) Результаты измерений для шаров с диаметрами $d_1 = 5$ мм и $d_2 = 6$ мм занесите таблицу.
2. Определите магнитные моменты одинаковых шариков по силе их сцепления (магнитные моменты шариков одинаковых диаметров считайте одинаковыми):
- a) Составьте цепочку из шариков, увеличивая её длину (вес) до тех пор, пока она не оторвётся от самого верхнего шарика.
- b) Определите вес оторвавшейся цепочки F .
- c) По формуле $F_0 = F/1,08$ определите силу сцепления шаров.
- d) Из формулы $F_0 = (\mu_0/4\pi) 6P_m^2/d^4$ определите магнитный момент шарика P_m .
- f) Результаты измерений для шаров с диаметрами $d_1 = 5$ мм и $d_2 = 6$ мм занесите таблицу.
3. Сравните значения магнитных моментов, полученные в П.1 и П.2. Какой метод даёт более точный результат для величины P_m ?
4. Соберите крутильный маятник. Для этого «магнитную стрелку» из 10 шариков одинакового размера, сцепленных друг с другом, подвесьте в горизонтальном положении на немагнитном штативе (см. рис.).
5. Возбудите крутильные колебания маятника в горизонтальной плоскости. Оцените влияние упругости нити на период колебаний, свернув «стрелку» в кольцо (очевидно, что магнитный момент такого кольцеобразного маятника равен нулю). Покажите, что упругость нити при расчете периода колебаний можно не учитывать.
6. Исследуйте зависимость периода T крутильных колебаний «стрелки» в горизонтальной плоскости от количества магнитных шариков n , составляющих «стрелку». Измерения проведите для значений $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ для шаров с $d_1 = 5$ мм и $d_2 = 6$ мм.
7. Постройте график зависимости $T(n)$.
8. Экстраполируйте экспериментальную зависимость $T(n)$ прямой $T = kn$.
9. По значению углового коэффициента k , рассчитайте величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли на широте Москвы. При расчетах используйте экспериментально определённые в Пп.1,2 значения магнитных моментов шариков.