Занятия 1-го полугодия по экспериментальной физике
в 8-м классе Олимпиадной школы МФТИ
(преподаватель к.ф.-м.н., доцент *А.А. Лукьянов*)

Занятия 4-й и 5-й недель (5-я неделя – сдача работы)

Название: **ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР «НЕПРАВИЛЬНОЙ» ФОРМЫ и ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ РАЗНОЙ ФОРМЫ ПО ФОРМУЛЕ СИМПСОНА**

Опыт 1. Измерение площадей фигур «неправильной» формы с помощью тетради в клетку.

Цель работы: Научиться измерять площади плоских фигур простейшей формы с помощью тетради в клетку с помощью приближенной процедуры. Оценка ошибок приближенной процедуры.

Оборудование: тетрадь в клетку

Задание: Вычислить площади ниже приведенных фигур (обведены черным цветом). Сравнить значения площадей фигур, показанных на рисунках 1-3, вычисленных точно и по приближенной процедуре (см. ниже). Для круга найти относительную ошибку вычисления площади по приближенной процедуре. Точная формула для площади круга $S_{\text{круга точн}} = \pi R^2$, где $\pi \approx 3{,}14$ (число «пи»).

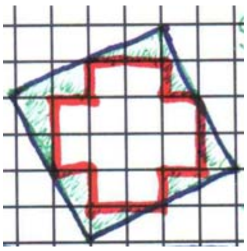

Рис.1

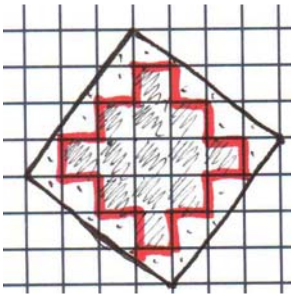

Рис.2

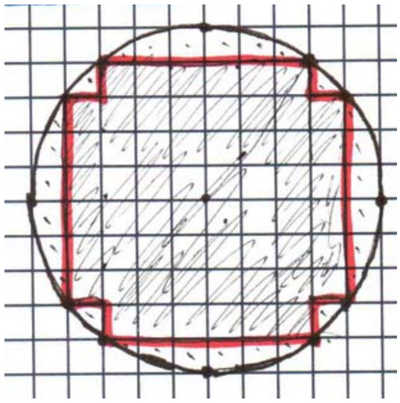

Рис.3 – круг

Теория. Расчетные формулы. Указания:

Приближенная процедура вычисления площади состоит в следующем. Сначала находят число клеток $N_{полн}$, которые изучаемая фигура покрывает полностью (обведены красным цветом). Все клетки имеют одинаковую площадь s_1 = ¼ см^2. Суммарная площадь всех таких клеток найдется по формуле $S_{полн} = N_{полн} \times s_1$. Затем подсчитывают число клеток $N_{част.}$, покрытых изучаемой фигурой частично. **Всем** частично накрытым леткам приписывают **одну и ту же площадь равную ½ площади целой одной клетки** s_1, т.е. 1/8 см^2. Площадь всех частично покрытых клеток равна $S_{част} = N_{част} \times 0{,}5 \times s_1$. Суммарная площадь всех и полностью покрытых и покрытых частично клеток равна $S = S_{полн} + S_{част} = N_{полн} \times s_1 + N_{част} \times 0{,}5 \times s_1$. Такое значение площади фигуры дает приближенная процедура.

Опыт 2 (Домашнее задание). Школьник стоит полу. Определить давление, которое он оказывает на пол. Массу школьника и площадь подошв его обуви определить самостоятельно.

Цель работы: Научиться оценивать площади реальных фигур, встречающихся в быту и реальных давлений.

Оборудование: домашняя тапочка, весы, тетрадь в клетку

Задание: Измерить площадь подошв обуви и (с помощью весов) измерить массу школьника. Вычислить искомую площадь и давление, оказываемое школьником на пол. Сравнить это давление с нормальным атмосферным давлением на Земле.

Теория. Расчетные формулы. Указания: Давления вычислить по формуле $P = mg/S$, где S – площадь подошв обуви человека (двух, если человек стоит на двух ногах), m – масса человека (измеряется весами), g – ускорение свободного падения. (Подумать, какое значение взять $g \approx 10$ Н/кг или $g \approx 9{,}8$ Н/кг.)

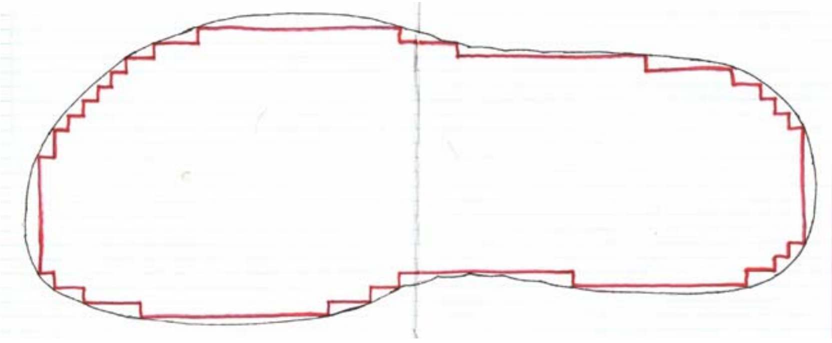

Рис.4

Площадь S одной тапочки определить с помощью тетради в летку по приближенной процедуре, тщательно подсчитав число клеток, полностью и частично покрытых тапкой:

«Опыт 3» **Измерение объемов. Формула Симпсона** – см. статью автора [1]

Школьникам будет полезно узнать об одной удивительной формуле, которая позволяет вычислять объемы тел сравнительно произвольной формы. Автор узнал о ней из «Занимательной геометрии» (имеется, например, издание 2007 г., но, скорее всего, книга издавалась и позже) уникального советского популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана (1882-1942). Формула, о которой идет речь, носит название формулы Симпсона; вот она

$$V_C = \frac{S_1 + 4S_2 + S_3}{6} h, \qquad (*)$$

где h – высота тела, S_1 – площадь нижнего основания, S_2 – площадь сечения тела посередине его высоты, S_3 – площадь нижнего основания. Удивительно, но такая простая формула объединяет в себе формулы столь разных тел, как призма, пирамида, усеченная пирамида, цилиндр, конус, усеченный конус, шар и шаровой сегмент (усеченный шар).

Например, в случае шарового сегмента (усеченного шара) высотой h (см. рис.6).

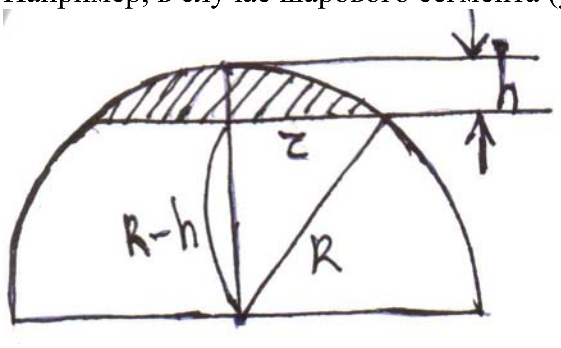

Рис.5

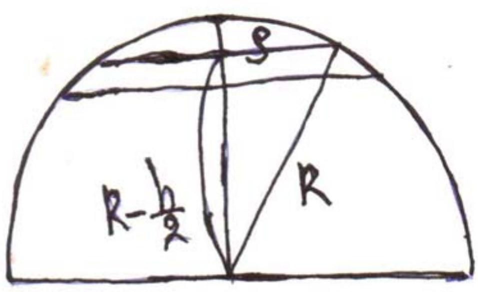

Рис.6

Точная формула для объема выглядит так $V = \pi\left(R - \frac{h}{3}\right)h^2$. Положим в формуле Симпсона: $S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot [R^2 - (R-h)^2] = 2\pi\left(R - \frac{h}{2}\right)h$ (мы воспользовались теоремой Пифагора);

согласно рис.7 и той же теореме Пифагора $S_2 = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot [R^2 - (R - h/2)^2] = \pi\left(R - \frac{h}{4}\right)h$;

$S_3 = 0$ (верхнее основание есть просто верхняя точка усеченного шара).

В итоге, $V_C = \left(\frac{S_1}{6} + \frac{2S_2}{3}\right)h = \frac{\pi(R - h/2)h^2}{3} + \frac{2\pi}{3}\left(R - \frac{h}{4}\right)h^2 = \pi\left(R - \frac{h}{3}\right)h^2$, что совпадает с точной формулой для объема усеченного шара.

Дополнительные задачи:

1. **Домашнее задание**. Проверить формулу Симпсона для усеченного конуса $V = \frac{\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)h$
2. Радиус Земли (6400 км) дан с погрешностью 0.47 %. Какова относительная погрешность в оценке объема Земли?
3. Определить абсолютную погрешность оценки объема Земли в условиях предыдущей задачи. Сравнить ее с объемом воды в Тихом океане (примерно 7×10^8 км^3).
4. Останкинская телебашня в Москве высотой 540 м имеет массу 55000 т. Какую массу имела бы точная копия этой башни высотой 54 см? Во сколько раз среднее давление копии меньше давления настоящей башни?

Литература

1. ***Лукьянов А.А.*** Измерение площадей и объемов // Потенциал, Октябрь, 2014, № 10, с. 58-63
2. ***Перельман Я.И***. «Занимательной геометрии». – М.: Издательство АСТ, 2007. – 588 с.; см. стр. 107 («Универсальная формула»)